

# 具有 Banach 代数的无正规的锥度量空间上 拟收缩映射的不动点定理的改进\*

朴勇杰

(延边大学理学院数学系, 吉林 延吉 133002)

**摘要:** 考虑一种新的拟收缩条件并证明具有 Banach 代数的无正规的锥度量空间上满足新的拟收缩条件的自映射具有唯一不动点。进一步, 给出更一般形式的拟收缩条件下的唯一不动点存在定理。所得结果推广和改进了若干已知的拟收缩映射的不动点定理。

**关键词:** 具有 Banach 代数的锥度量空间; 不动点; 拟收缩; 推广的拟收缩;  $c$ -序列

**中图分类号:** O177.91, O189.11 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2018) 01-0063-06

## An improvement of fixed point theorems for quasi-contractive mappings on non-normal cone metric spaces with Banach algebras

PIAO Yongjie

(Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

**Abstract:** A new quasi-contractive condition is studied. It is proven that the self-mappings satisfying the new contractive condition has a unique fixed point on non-normal cone metric spaces with Banach algebras. Furthermore, a unique fixed theorem under the more general quasi-contractive condition is given. The obtained result generalizes and improves some well-known fixed point theorems for quasi-contractive mappings.

**Key words:** cone metric space with Banach algebras; fixed point; quasi-contraction; generalized quasi-contraction;  $c$ -sequence

1974 年 Ciric 在完备的度量空间  $(X, d)$  上引进了  $X$  上的自映射  $T$  拟收缩映射的概念: 如果存在  $k \in [0, 1)$  使得对任何  $x, y \in X$ , 总有

$$d(Tx, Ty) \leq k \max \{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx) \}$$

并证明了完备的度量空间上任何拟收缩映射必有唯一不动点。

最近, Kumam 等<sup>[1]</sup> 引进了如下概念: 称度量空间  $X$  上自映射  $T$  是推广的拟收缩的, 如果存在  $q \in [0, 1)$  使得对任何  $x, y \in X$ , 成立

$$d(Tx, Ty) \leq q \max \{ d(x, y),$$

$$d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx), d(T^2x, x), d(T^2x, Tx), d(T^2x, y), d(T^2x, Ty) \}$$

文献 [1] 用实例说明了新的拟收缩概念明显弱于 Ciric 的拟收缩, 并证明当  $X$  是  $T$ -轨道完备时  $T$  具有唯一不动点。因此所得结论明显推广和改进了 Ciric 的结果。

2007 年, Huang 等<sup>[2]</sup> 引进了锥度量空间的概念, 推广和改进了通常的实空间, 并得到若干的不动点定理。特别是近几年, 一些作者在锥度量空间上研究了拟收缩映射, 得到了若干重要结果<sup>[3-7]</sup>。

\* 收稿日期: 2017-04-02

基金项目: 国家自然科学基金 (11361064)

作者简介: 朴勇杰 (1962 年生), 男; 研究方向: 非线性分析和不动点理论; E-mail: sxpyj@ybu.edu.cn

最近,在文献 [8-10] 中引进了具有 Banach 代数的锥度量空间并得到了一些推广的不动点定理,特别是, Liu 等<sup>[9]</sup>在正规条件下得到了关于拟收缩映射的不动点存在定理。之后,许绍元等<sup>[11]</sup>和 Huang 等<sup>[12]</sup>分别用两种不同的方式证明了在非正规的条件下文献 [9] 中得到的结果仍然成立,所得结果具有一定的意义。

在本文,将沿用文献 [11-12] 中的研究方法并结合文献 [1] 中的推广的拟收缩条件讨论并得到无正规条件下的新的不动点定理,推广和改进文献 [9, 11-12] 中的相应结果。

## 1 基本知识

设  $A$  总是实 Banach 代数,即  $A$  是具有乘法运算的实 Banach 空间,其运算满足如下性质(对任何  $x, y, z \in A, \alpha \in \mathbf{R}$ ):

- (i)  $(xy)z = x(yz)$ ;
- (ii)  $x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$ ;
- (iii)  $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ ;
- (iv)  $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ 。

本文总假设  $A$  具有单位元(即乘法单位元)  $e$  使得对任何  $x \in A$  均有  $ex = xe = x$ 。一个元  $x \in A$  被称为可逆的,如果存在称之为逆元的元  $y \in A$  使得  $yx = xy = e$ 。 $x$  的逆元  $y$  用  $x^{-1}$  表示。详文献 [13]。

**命题 1**<sup>[13]</sup> 设  $A$  是具有单位元  $e$  的实 Banach 代数且  $x \in A$ 。如果  $x$  的谱半径  $r(x) < 1$ , 即

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$$

则  $(e-x)$  是可逆的,且有

$$e - x = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i$$

**注 1** i) 对任何  $x \in A, r(x) \leq \|x\|$ 。详见文献 [13];

ii) 如果命题 1 的条件  $r(x) < 1$  用条件  $\|x\| < 1$  代替,则结论仍然成立。

**注 2** 如果  $r(x) < 1$ , 则  $\|x^n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  时)。详见文献 [12]。

称具有零元  $0$  的 Banach 代数  $A$  的子集  $P$  为锥,如果

- (i)  $P$  是非空闭集且满足  $\{0, e\} \subset P$ ;
- (ii) 对任何非负实数  $\alpha, \beta, \alpha P + \beta P \subset P$ ;
- (iii)  $P^2 = PP \subset P$ ;
- (iv)  $P \cap (-P) = \{0\}$ 。

对于给定的锥  $P \subset A$ , 定义关于  $P$  的半序  $\leq$  如

下:  $x \leq y$  当且仅当  $y - x \in P$ 。 $x < y$  表示  $x \leq y$  但  $x \neq y$ 。而  $x \leq y$  表示  $y - x \in \text{int}P$ , 其中  $\text{int}P$  表示  $P$  的内部。称  $P$  是体锥是指  $\text{int}P \neq \emptyset$ 。在本文,总假设  $P$  是体锥且  $\leq$  是关于  $P$  的半序。

称锥  $P$  是正规的是指存在正实数  $M$  使得对任何  $x, y \in A$ ,

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq k \|y\|$$

满足上述条件的最小的正数  $M$  被称为  $P$  的正规常数。

**定义 1**<sup>[8-10]</sup> 设  $X \neq \emptyset$ 。如果映射  $d: X \times X \rightarrow A$  满足

- (i) 对任何  $x, y \in X, d(x, y) \geq 0$  且  $d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ ;
- (ii) 对任何  $x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (iii) 对任何  $x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。

则称  $d$  是  $X$  上的锥度量,  $(X, d)$  是具有 Banach 代数  $A$  的锥度量空间。

**注 3** 关于具有 Banach 代数的锥度量空间的例子可参看文献 [8-10]。

**定义 2**<sup>[8-10]</sup> 设  $(X, d)$  是具有 Banach 代数  $A$  的锥度量空间,  $x \in X$  且  $\{x_n\}$  是  $X$  中的序列。则

(i) 称  $\{x_n\}$  收敛于  $x$  是指对任何  $c \in A$  且  $c \geq 0$ , 存在自然数  $N$  使得对任何  $n \geq N, d(x_n, x) \leq c$ 。记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  或  $x_n \rightarrow x$ 。

(ii) 称  $\{x_n\}$  是柯西的是指任何  $c \in A$  且  $c \geq 0$ , 存在自然数  $N$  使得对任何  $n, m \geq N, d(x_n, x_m) \leq c$ 。

(iii) 称  $(X, d)$  是完备的是指  $(X, d)$  中的每个柯西序列都在  $(X, d)$  中收敛。

**引理 1**<sup>[14-15]</sup> 设  $E$  是具有体锥  $P$  的 Banach 空间。若对任何  $c \geq 0$ , 成立  $0 \leq u \leq c$ , 则  $u = 0$ 。

**引理 2**<sup>[14-15]</sup> 设  $E$  是具有体锥  $P$  的 Banach 空间。若  $\|x_n\| \rightarrow 0$  (当  $x \rightarrow \infty$  时), 则对任何  $c \geq 0$ , 存在自然数  $N$  使得对任何  $n \geq N, x_n \leq c$ 。

**定义 3**<sup>[16-17]</sup> 设  $P$  是 Banach 代数  $A$  中的体锥。称序列  $\{u_n\} \subset P$  为  $c$ -序列, 如果对任何  $c \geq 0$ , 存在自然数  $N$  使得对任何  $n \geq N, u_n \leq c$ 。

**命题 2**<sup>[16]</sup> 设  $P$  是 Banach 代数  $A$  中的体锥,  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  是  $P$  中的两个序列。如果  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  都是  $c$ -序列且  $\alpha, \beta \geq 0$ , 则  $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$  也是  $c$ -序列。

**命题 3**<sup>[16]</sup> 设  $P$  是 Banach 代数  $A$  中的体锥,  $\{x_n\}$  是  $P$  中的序列。则下列命题等价:

(i)  $\{x_n\}$  是  $c$ -序列;

(ii) 对任何  $c \geq 0$ , 存在自然数  $N_1$  使得对任何  $n \geq N_1$  时  $u_n < c$ ;

(iii) 对任何  $c \geq 0$ , 存在自然数  $N_2$  使得对任何  $n \geq N_2$  时  $u_n \leq c$ .

**命题 4**<sup>[10]</sup> 如果  $P$  是 Banach 代数  $A$  中的体锥,  $k \in P$  是任意给定的向量且  $\{u_n\}$  是  $c$ -序列, 则  $\{ku_n\}$  也是  $c$ -序列。

**命题 5**<sup>[10]</sup> 设  $(X, d)$  是具有 Banach 代数  $A$  的锥度量空间且  $P$  是  $A$  中的体锥。若  $\{x_n\}$  是  $X$  中收敛于  $x \in X$  的序列。则

(i)  $\{d(x_n, x)\}$  是  $c$ -序列;

(ii) 对任何自然数  $p$ ,  $\{d(x_n, x_{n+p})\}$  也是  $c$ -序列;

**命题 6**<sup>[10]</sup> 设  $A$  是 Banach 代数且  $x, y \in A$ 。如果  $x$  和  $y$  可交换, 则  $r(xy) \leq r(x)r(y)$ 。

**定义 4** 设  $(X, d)$  是具有 Banach 代数  $A$  的锥度量空间,  $T: X \rightarrow X$  是一个映射。对任何  $x \in X$  及正整数  $n$ , 令

$$O_T(x, n) = \{x, Tx, T^2x, \dots, T^n x\}, O_T(x, +\infty) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$$

称  $O_T(x, +\infty)$  为  $x$  点的  $T$ -轨道, 称  $(X, d)$  为  $T$ -轨道完备是指  $O_T(x, +\infty)$  中的每个柯西序列必收敛。

**注 4** 定义 4 是文献 [1] 中相应定义在具有 Banach 代数  $A$  的锥度量空间上表现形式。

## 2 拟收缩映射的不动点定理的推广

文献 [9, 11-12] 中给出如下定义:

**定义 5** 设  $(X, d)$  是具有 Banach 代数  $A$  的锥度量空间。称一个映射  $T: X \rightarrow X$  为拟收缩的是指存在  $k \in P$  且  $r(k) < 1$  使得对任何  $x, y \in X$ , 成立

$$d(Tx, Ty) \leq ku \tag{1}$$

其中  $u \in \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$ 。

文献 [11-12] 在  $X$  的非正规条件下分别给出了如下拟收缩映射的不动点存在定理:

**定理 1** 设  $(X, d)$  是具有 Banach 代数  $A$  的完备锥度量空间。如果  $T: X \rightarrow X$  为拟收缩映射, 即满足式 (1)。则  $T$  有唯一不动点, 并且对任何  $x \in X$ , 迭代序列  $\{T^n x\}$  收敛于该不动点。

下面, 首先给出如下新的一类拟收缩映射的不动点存在定理。

**定理 2** 设  $(X, d)$  是具有 Banach 代数  $A$  的锥

度量空间,  $T: X \rightarrow X$  为自映射。如果  $X$  是  $T$ -轨道完备的且存在  $k \in P$  且  $r(k) < 1$  使得对任何  $x, y \in X$ , 成立

$$d(Tx, Ty) \leq kv(x, y) \tag{2}$$

其中  $v(x, y) \in A(x, y) := \{d(T^2x, x), d(T^2x, Tx), d(T^2x, y), d(T^2x, Ty)\}$ 。则  $T$  有唯一不动点, 并且对任何  $x \in X$ , 迭代序列  $\{T^n x\}$  收敛于该不动点。

**证明** 任取  $x_0 := x \in X$  并定义  $x_n = T^n x = T^{n-1}x_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 构造一个序列  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ 。对任何固定的  $i = 1, 2, \dots$ , 根据式 (2),

$$d(x_i, x_{i+1}) = d(Tx_{i-1}, Tx_i) \leq kv(x_{i-1}, x_i) \tag{3}$$

其中

$$v(x_{i-1}, x_i) \in A(x_{i-1}, x_i) = \{d(T^2x_{i-1}, x_{i-1}), d(T^2x_{i-1}, Tx_{i-1}), d(T^2x_{i-1}, x_i), d(T^2x_{i-1}, Tx_i)\}$$

即  $v(x_{i-1}, x_i) \in A(x_{i-1}, x_i) = \{d(x_{i+1}, x_{i-1}), d(x_{i+1}, x_i), 0\}$ 。

如果  $v(x_{i-1}, x_i) = d(x_{i+1}, x_{i-1})$ , 则根据式 (3) 得到

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq kd(x_{i+1}, x_{i-1})$$

如果  $v(x_{i-1}, x_i) = d(x_{i+1}, x_i)$ , 则根据式 (3) 得到

$d(x_i, x_{i+1}) \leq kd(x_{i+1}, x_i) \Rightarrow (e - k)d(x_i, x_{i+1}) \leq 0$   
于是根据命题 1 得到

$$d(x_i, x_{i+1}) = 0 \leq kd(x_{i+1}, x_{i-1})$$

如果  $v(x_{i-1}, x_i) = 0$ , 则根据式 (3) 得到

$$d(x_i, x_{i+1}) = 0 \leq kd(x_{i+1}, x_{i-1})$$

综合上三种情况得到

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq kd(x_{i+1}, x_{i-1}), i = 1, 2, \dots \tag{4}$$

对任何固定的  $i = 1, 2, \dots$ , 利用式 (2),

$$d(x_i, x_{i+2}) = d(Tx_{i-1}, Tx_{i+1}) \leq kv(x_{i-1}, x_{i+1}) \tag{5}$$

其中  $v(x_{i-1}, x_{i+1}) \in A(x_{i-1}, x_i) = \{d(x_{i+1}, x_{i-1}), d(x_{i+1}, x_i), 0, d(x_{i+1}, x_{i+2})\}$ 。

若  $v(x_{i-1}, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_{i-1})$ , 则根据式 (5) 得到

$$d(x_i, x_{i+2}) \leq kd(x_{i-1}, x_{i+1})$$

若  $v(x_{i-1}, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_i)$ , 则根据式 (5) 和式 (4) 得到

$$d(x_i, x_{i+2}) \leq kd(x_i, x_{i+1}) \leq k^2d(x_{i-1}, x_{i+1})$$

若  $v(x_{i-1}, x_{i+1}) = 0$ , 则根据式 (5) 得到

$$d(x_i, x_{i+2}) \leq 0 \leq kd(x_{i-1}, x_{i+1})$$

若  $v(x_{i-1}, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_{i+2})$ , 则根据式 (5) 和式 (4) 得到

$$d(x_i, x_{i+2}) \leq kd(x_{i+1}, x_{i+2}) \leq k^2 d(x_i, x_{i+2})$$

于是

$$(e - k^2)d(x_i, x_{i+2}) \leq 0$$

根据命题 6 可知  $r(k^2) \leq (r(k))^2 < 1$ , 于是根据命题 1 可知  $e - k^2$  是可逆的, 因此由上式得到

$$d(x_i, x_{i+2}) \leq 0 \leq kd(x_{i-1}, x_{i+1})$$

综合上述四个情况得到

$$[d(x_i, x_{i+2}) \leq kd(x_{i-1}, x_{i+1})] \vee [d(x_i, x_{i+2}) \leq k^2 d(x_{i-1}, x_{i+1})], \forall i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

把式 (6) 写成

$$d(x_i, x_{i+2}) \leq k^{(i, i+2)} d(x_{i-1}, x_{i+1}), \forall i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

其中  $[k^{(i, i+2)} = k] \vee [k^{(i, i+2)} = k^2]$ 。

下面将证明: 对任何自然数  $n$ , 当两个自然数  $i, j$  满足  $1 \leq i, j \leq n$  时成立

$$d(x_i, x_j) \leq k(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] \quad (8)$$

当  $n = 1$  时  $i = j = 1$ , 于是式 (8) 显然成立。假设  $n = m$  时式 (8) 成立, 即

$$d(x_i, x_j) \leq$$

$$k(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)], \forall 1 \leq i, j \leq m \quad (9)$$

现设  $n = m + 1$ 。由于当  $1 \leq i, j \leq m$  时式 (8) 成立, 于是可设  $j = m + 1, 1 \leq i \leq m$ 。

由于

$$d(x_i, x_{m+1}) = d(Tx_{i-1}, Tx_m) \leq kv(x_{i-1}, x_m)$$

其中  $v(x_{i-1}, x_m) \in A(x_{i-1}, x_m) = \{d(x_{i-1}, x_{i+1}), d(x_i, x_{i+1}), d(x_{i+1}, x_m), d(x_{i+1}, x_{m+1})\}$ 。

(I) 考虑  $i = 1$  的情况。此时  $v(x_0, x_m) \in \{d(x_0, x_2), d(x_1, x_2), d(x_2, x_m), d(x_2, x_{m+1})\}$ 。

1) 当  $v(x_0, x_m) = d(x_0, x_2)$  时,

$$d(x_1, x_{m+1}) \leq kd(x_0, x_2) \leq$$

$$k[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] \leq$$

$$k(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

2) 当  $v(x_0, x_m) = d(x_1, x_2)$  时,

$$d(x_1, x_{m+1}) \leq kd(x_1, x_2) \leq$$

$$k[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] \leq$$

$$k(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

3) 当  $v(x_0, x_m) = d(x_2, x_m)$  时,

$$d(x_1, x_{m+1}) \leq kd(x_2, x_m) \leq$$

$$k[d(x_1, x_2) + d(x_1, x_m)] \leq$$

$$k[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] + kd(x_1, x_m)$$

结合式 (9) 得到

$$d(x_1, x_{m+1}) \leq k[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] +$$

$$kk(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

即

$$d(x_1, x_{m+1}) \leq$$

$$k[e + k(e - k)^{-1}] [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] =$$

$$k(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

4) 当  $v(x_0, x_m) = d(x_2, x_{m+1})$  时,

$$d(x_1, x_{m+1}) \leq$$

$$k[d(x_1, x_2) + d(x_1, x_{m+1})] \leq$$

$$k[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] + kd(x_1, x_{m+1})$$

于是得到

$$d(x_1, x_{m+1}) \leq k(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

综合以上讨论可知当  $i = 1, j = m + 1$  时式 (8) 成立。

(II) 考虑  $i = m$  的情况。此时

$$d(x_m, x_{m+1}) = d(Tx_{m-1}, Tx_m) \leq kv(x_{m-1}, x_m)$$

其中  $v(x_{m-1}, x_m) \in A(x_{m-1}, x_m) = \{d(x_{m-1}, x_{m+1}), d(x_m, x_{m+1}), 0\}$ 。

1) 若  $v(x_{m-1}, x_m) = d(x_{m-1}, x_{m+1})$ , 则

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq kd(x_{m-1}, x_{m+1}) \leq$$

$$k[d(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, x_{m+1})]$$

即

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq k(e - k)^{-1} d(x_{m-1}, x_m)$$

于是根据式 (4) 和式 (7) 得到

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq k^2(e - k)^{-1} d(x_{m-2}, x_m) \leq k^2(e - k)^{-1} k^{(m-2, m)} k^{(m-3, m-1)} \dots k^{(1, 3)} d(x_0, x_2) \leq$$

$$k(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

2) 若  $v(x_{m-1}, x_m) = d(x_m, x_{m+1})$ , 则

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq$$

$$kd(x_m, x_{m+1}) \Rightarrow (e - k)d(x_m, x_{m+1}) \leq 0$$

于是

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq k(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

3) 若  $v(x_{m-1}, x_m) = 0$ , 则显然成立

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq k(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

综合上述三种情况可知当  $i = m, j = m + 1$  时式 (8) 仍成立。

(III) 考虑  $2 \leq i \leq m - 1$  的情况。此时, 由于  $i + 1 \leq m$ , 因此当  $v(x_{i-1}, x_m)$  取  $A(x_{i-1}, x_m)$  中的元  $d(x_{i-1}, x_{i+1}), d(x_i, x_{i+1}), d(x_{i+1}, x_m)$  之一时根据归纳原理得到

$$d(x_i, x_{m+1}) \leq kv(x_{i-1}, x_m) \leq$$

$$k^2(e - k)^{-1} [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

而当  $v(x_{i-1}, x_m) = d(x_{i+1}, x_{m+1})$  时

$$d(x_i, x_{m+1}) \leq kd(x_{i+1}, x_{m+1}) \leq$$

$$k[d(x_i, x_{i+1}) + d(x_i, x_{m+1})]$$

于是得到

$$d(x_i, x_{m+1}) \leq k(e - k)^{-1}d(x_i, x_{i+1})$$

因此根据式 (4) 和式 (7) 得到

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{m+1}) &\leq k^2(e - k)^{-1}d(x_{i-1}, x_{i+1}) \leq \\ &k^2(e - k)^{-1}k^{(i-1, i+1)}k^{(i-2, i)} \dots k^{(1, 3)}d(x_0, x_2) \leq \\ &k(e - k)^{-1}d(x_0, x_2) \leq \\ &k(e - k)^{-1}[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] \end{aligned}$$

综合上述讨论可知当  $2 \leq i \leq m - 1, j = m + 1$  时 (8) 仍然成立。于是综合所有情况并根据归纳法知式 (8) 成立。

对任何两个自然数  $n, m$  且  $1 < n < m$ , 根据式 (2),

$$d(x_n, x_m) = d(Tx_{n-1}, Tx_{m-1}) \leq kv(x_{n-1}, x_{m-1})$$

其中  $v(x_{n-1}, x_{m-1}) \in A(x_{n-1}, x_{m-1}) = \{d(x_{n-1}, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{m-1}), d(x_{n+1}, x_m)\}$ 。令

$$C(n, m) = \{d(x_i, x_j) \mid n \leq i, j \leq m\}$$

则由上式可知对每个  $u \in C(n, m)$ , 存在  $v \in C(n - 1, m)$  使得  $u \leq kv$ 。于是得到

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq ku_1 \leq k^2u_2 \leq \dots \leq \\ &k^{n-1}u_{n-1} \leq k^n(e - k)^{-1}[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$u_1 \in C(n - 1, m),$$

$$u_2 \in C(n - 2, m), \dots, u_{n-1} \in C(1, m)$$

及

$$u_{n-1} \leq k(e - k)^{-1}[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

(根据式 (8))

由于

$$\|k^n(e - k)^{-1}[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]\| \leq$$

$$\|k^n\| \| (e - k)^{-1} [\|d(x_0, x_1)\| + \|d(x_1, x_2)\|] \|$$

且由注 2 知  $\|k^n\| \rightarrow 0$  (当  $n \rightarrow \infty$  时), 于是根据引理 2, 对任何  $c \geq 0$ , 存在自然数  $N > 1$  使得  $n > N$  时

$$k^n(e - k)^{-1}[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] \leq c$$

于是结合式 (10) 得到对任何  $c \geq 0$ , 存在自然数  $N > 1$  使得  $m \geq n > N$  时  $d(x_n, x_m) \leq c$ 。因此  $\{x_n\}$  是  $O_T(x, +\infty)$  中的柯西序列, 所以根据  $T$ -轨道完备性存在  $x^* \in X$  使得  $x_n \rightarrow x^*$ 。

根据式 (2), 对任何自然数  $n$ ,

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq \\ d(x^*, x_n) + d(Tx_{n-1}, Tx^*) &\leq \\ d(x^*, x_n) + kv(x_{n-1}, x^*) &\end{aligned} \tag{11}$$

其中  $v(x_{n-1}, x^*) \in A(x_{n-1}, x^*) = \{d(x_{n-1}, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x^*), d(x_{n+1}, Tx^*)\}$ 。

1) 若  $v(x_{n-1}, x^*) = d(x_{n-1}, x_{n+1})$ , 则根据式 (11) 得到

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_n) + kd(x_{n-1}, x_{n+1}) \tag{12}$$

2) 若  $v(x_{n-1}, x^*) = d(x_n, x_{n+1})$ , 则根据式 (11) 得到

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_n) + kd(x_n, x_{n+1}) \tag{13}$$

3) 若  $v(x_{n-1}, x^*) = d(x_{n+1}, x^*)$ , 则根据式 (11) 得到

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_n) + kd(x_{n+1}, x^*) \tag{14}$$

4) 若  $v(x_{n-1}, x^*) = d(x_{n+1}, Tx^*)$ , 则根据式 (11) 得到

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, x_n) + kd(x_{n+1}, Tx^*) \leq \\ d(x^*, x_n) + k[d(x_{n+1}, x^*) + d(x^*, Tx^*)] &\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq \\ (e - k)^{-1}[d(x^*, x_n) + k[d(x_{n+1}, x^*)]] &\end{aligned} \tag{15}$$

因此综合四种情况可知无论何种, 由命题 2 - 命题 5, 都有

$$d(x^*, Tx^*) \leq y_n$$

其中  $\{y_n\}$  是锥  $P$  中的  $c$ -序列。于是根据定义 3, 对任何  $c \geq 0$ , 存在自然数  $N$  使得当  $n > N$  时  $d(x^*, Tx^*) \leq y_n \leq c$ , 因此根据引理 1 得到  $d(x^*, Tx^*) = 0$ , 故  $x^*$  是  $T$  的不动点。

如果  $y^*$  也是  $T$  的不动点, 则根据式 (2) 得到

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq kv(x^*, y^*)$$

其中  $v(x^*, y^*) \in A(x^*, y^*) = \{d(x^*, y^*), 0\}$ 。于是容易得到  $x^* = y^*$ , 因此  $x^*$  是  $T$  的唯一不动点。

记

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \\ \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}; &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \\ \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx), \\ d(T^2x, x), d(T^2x, Tx), d(T^2x, y), d(T^2x, Ty)\} &\end{aligned}$$

则  $D(x, y) = A(x, y) \cup B(x, y)$ 。

注 5 用  $(X, d)$  的  $T$ -轨道完备性代替定理 1 中的  $(X, d)$  的完备性, 定理 1 仍然成立。

注 6 定理 1 的证明的关键一步是: 对任何自然数  $n$ , 当两个自然数  $i, j$  满足  $1 \leq i, j \leq n$  时成立  $d(x_i, x_j) \leq k(e - k)^{-1}d(x_0, x_1)$  (详见文献 [11 - 12] 中的证明), 但是这结果也满足式 (8)。

结合定理 1 和定理 2 并根据注 5 和注 6, 得到如下具有 Banach 代数的非正规的锥度量空间上

Ciric 定理 (即定理 1) 的推广结果。

**定理 3** 设  $(X, d)$  是具有 Banach 代数  $A$  的锥度量空间,  $T: X \rightarrow X$  为自映射。如果  $X$  是  $T$ -轨道完备的且存在  $k \in P$  且  $r(k) < 1$  使得对任何  $x, y \in X$ , 成立

$$d(Tx, Ty) \leq kv(x, y) \quad (2)$$

其中  $v(x, y) \in D(x, y)$ 。则  $T$  有唯一不动点, 并且对任何  $x \in X$ , 迭代序列  $\{T^n x\}$  收敛于该不动点。

### 参考文献:

- [1] KUMAM P, VAN D, SITHAKERNKIET K. A generalization of Ciric fixed point theorems [J]. *Filomat*, 2015, 29(7): 1549 – 1556.
- [2] HUANG L G, ZHANG X. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings [J]. *J Math Anal Appl*, 2007, 332(2): 1468 – 1476.
- [3] AI-KHALEEL M, AI-SHARIFA S, KHANDAQJI M. Fixed points for contraction mappings in generalized cone metric spaces [J]. *Jordan J Math Stat*, 2012, 5(4): 291 – 307.
- [4] GAJIC J L, RAKOCEVIC V. Quasi-contractions on a non-normal cone metric spaces [J]. *Funct Anal Appl*, 2012, 46(1): 75 – 79.
- [5] ILIC D, RAKOCEVIC V. Quasi-contractions on a cone metric spaces [J]. *Appl Math Lett*, 2009, 22(5): 728 – 731.
- [6] KADELBURG Z, REDENOVIC S, RAKOCEVIC V. Remarks on “Quasi-contractions on a cone metric spaces” [J]. *Appl Math Lett*, 2009, 22(11): 1674 – 1679.
- [7] KADELBURG Z, PAVLOVIC M, REDENOVIC S. Common fixed point theorems for ordered contractions and quasi-contractions in ordered cone metric spaces [J]. *Comput Math Appl*, 2010, 59(9): 3148 – 3159.
- [8] LIU H, XU S Y. Cone metric spaces with Banach algebras and fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings [J]. *Fixed Point Theory and Applications*,

- 2013, 2013(1): 1 – 10.
- [9] LIU H, XU S Y. Fixed point theorems of quasi-contractions on cone metric spaces with Banach algebras [J]. *Abstr Appl Anal*, 2013, 2013(4): 764 – 787.
- [10] XU S Y, REDENOVIC S. Fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings on cone metric spaces over Banach algebras without assumption of normality [J]. *Fixed Point Theory and Applications*, 2014, 2014(1): 1 – 12.
- [11] 许绍元, 马超, 周作领. 具有 Banach 代数的锥度量空间上拟压缩映射的新的不动点定理[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2015, 54(4): 1 – 4.  
XU S Y, MA C, ZHOU Z L. A new fixed point theorem of quasi-contractions on cone metric spaces over Banach algebras [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2015, 54(4): 1 – 4.
- [12] HUANG H P, XU S Y, LIU H. Fixed point theorems of quasi-contractions on non-normal cone metric spaces with Banach Algebras [J]. *Mathematical Applicata*, 2015, 28(1): 110 – 114.
- [13] RUDIN W. *Functional Analysis* [M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.
- [14] REDENOVIC S, RHOADES B E. Fixed point theorem for two non-self mappings in cone metric spaces [J]. *Comput Math Appl*, 2009, 57(10): 1701 – 1707.
- [15] JANKOVIC S, KADELBURG Z, REDENOVIC S. On cone metric space: A survey [J]. *Nonl Anal*, 2011, 74(7): 2591 – 2601.
- [16] KADELBURG Z, REDENOVIC S. A note on various types of cones and fixed point results in cone metric spaces [J]. *Asian Journal of Mathematics and Applications*, 2013, Article ID ama 0104.
- [17] DORDEVIC M, DIRIC D, KADELBURG Z, et al. Fixed point results under c-distance in tvs-cone metric spaces [J]. *Fixed Point Theory and Applications*, 2011, 2011(1): 1 – 9.